Politecnico di Milano
Riepilogo di Caravano Andrea

Formule e regole di integrazione – Schema applicativo
Integrali indefiniti

Integrali immediati di funzioni elementari

$\int k\,dx$	$k\,x + c$
$\int x^n\,dx$ $\int \frac{1}{x^n}\,dx = \int x^{-n}\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\|x\| + c$
$\int \sin x\ dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x\ dx$	$\sin x + c$
$\int e^x\,dx$	$e^x + c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sinh x\ dx$	$\cosh x\ dx$
$\int \cosh x\ dx$	$\sinh x\ dx$
$\int \tanh x\ dx$	$\ln(cosh(x)) + c$

Proprietà di linearità

$\int \big(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)\big)\,dx$	$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)\,dx$
$\int k\,f(x)\,dx$	$k\int f(x)\,dx$

Formule di uso comune

$\int \cos^2 x\ dx = \int \frac{1+cos(2x)}{2}$
$\int \sin^2 x\ dx = \int \frac{1-cos(2x)}{2}$

Integrali immediati di funzioni composte

$\int \boldsymbol{f(x)^n \cdot f'(x)\, dx}$	$\boldsymbol{\dfrac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c}$
$\int \boldsymbol{e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx}$	$\boldsymbol{e^{f(x)} + c}$
$\int \boldsymbol{a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx}$	$\boldsymbol{\dfrac{a^{f(x)}}{ln\,(a)} + c}$
$\int \boldsymbol{\dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\, dx}$	$\boldsymbol{\ln\lvert f(x)\rvert + c}$

Regola della divisione

Meccanismo di divisione fra polinomi - video esplicativo
Metodo classico: https://youtu.be/e5k6jnQINQM?t=7
Metodo di Ruffini (solo con divisore di 1° grado): https://youtu.be/pKdtMg1xnZM?t=6

Quando il grado del numeratore ≥ al grado del denominatore, posso applicare la regola della divisione, secondo cui:

$$\frac{dividendo}{divisore} = quoziente + resto \rightarrow \int \boldsymbol{quoziente} + \boldsymbol{\frac{resto}{divisore}}$$

Regola della scomposizione a denominatore

Data una frazione, il cui denominatore ha grado pari (o maggiore) a 2 e il salto di grado tra numeratore e denominatore è anch'esso pari a 2, è possibile dividere l'integrale in due frazioni distinte, tali da poter essere equivalenti a quella iniziale, se e solo se il denominatore è scomponibile.

- Con $\Delta > \mathbf{0}$

Un possibile esempio è il seguente:

$\int \frac{\mathbf{1}}{x^2 + x} = \int \frac{\mathbf{1}}{(x+\mathbf{1}) \cdot x}$	$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+\mathbf{1}}$

Si tratta quindi, ora, di determinare i termini A e B, in modo tale da ricondurci alla frazione iniziale.

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) \times Bx}{x(x+1)} = \frac{x(A+B)+A}{x(x+1)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\, dx = ln|x| - ln|x+1| + c$$

- Con $\Delta = \mathbf{0}$

Trattare la funzione nella forma $f(x)^n$, per applicare la formula di integrazione immediata seguente:

$\int f(x)^n \cdot f\,'(x)\, dx$	$\frac{f(x)^{\,n+1}}{n+1} + c$

- Con $\Delta < \mathbf{0}$

$\int \frac{1}{(x+m)^2 + k^2}\, dx$	$\frac{1}{k}\, arctan\left(\frac{x+m}{k}\right) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx$	$arctan(x) + c$

Integrazione per sostituzione

Attraverso il metodo di integrazione per sostituzione, **bisogna individuare un elemento dell'integrale indefinito fornito che, ai fini della risoluzione, potrebbe rappresentare un ostacolo.** Tali elementi sono rappresentati, comunemente, dai radicali, esponenziali, logaritmi.

Seguire, a scopo esemplificativo, lo svolgimento del seguente esercizio.

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

$$t=\sqrt{x-1} \rightarrow t^2 = x-1$$

Derivata

$$1\,dx = 2t\,dt$$

$$\int (t^2+1)\cdot t\cdot 2t\,dt = \int 2t^4+2t^2\,dt = \frac{2t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}+c$$

Integrazione per parti

A partire dalla formula di derivazione del prodotto, ricaviamo la formula di integrazione per parti.

$$\int f(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Si tratta quindi, ora, di definire $g'(x)$ e $f(x)$

È consigliabile definire $g'(x)$ in modo tale da non elevare il grado dell'integrale. Se presente un logaritmo, esso rappresenterà sempre $f(x)$, dato che non posso ricavarne l'integrale.

Integrali definiti

Dato un'integrale definito, si denominano "estremi di integrazione" le costanti poste all'estrema sinistra dell'espressione, indicanti, rispettivamente $n1$ ed $n2$, generalmente indicati in ordine crescente, da $n1$ a $n2$.

$$\int_{n1}^{n2} f(x)\ dx = f(n2) - f(n1)$$

Dove, in genere, $n2$ è $\geq n1$