

# DINAMICA

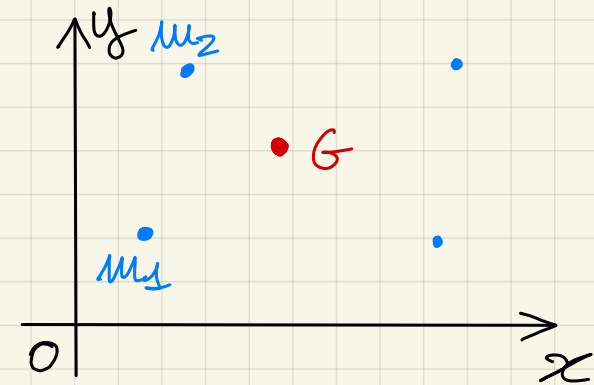
07/04/2022

IL SISTEMA È ORA IN GENERICO MOVIMENTO

## BARICENTRO (O CENTRO DI MASSA)

ORA CI IMPORTA LA DISTRIBUZIONE DELLA MASSA NEL CORPO RIGIDO!

SISTEMA FORMATO DA  $n$  MASSE CONCENTRATE:



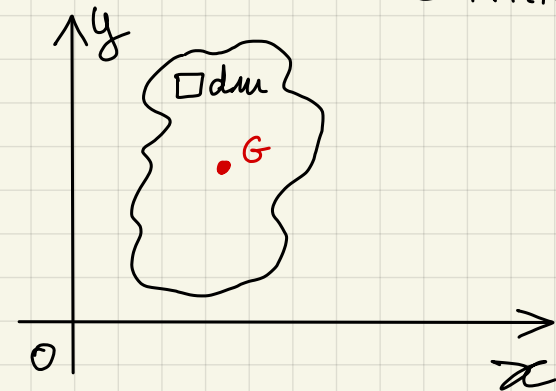
$G = \text{BARICENTRO}$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{m_{\text{TOT}}}$$

MEDIA  
PESATA

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot m_i}{m_{\text{TOT}}}$$

CASO "CORPO CONTINUO":



$$x_G = \frac{\int_V \rho(x, y) x dV}{m_{\text{TOT}}}$$

→ DENSITÀ CHE PUÒ VARIARE PER  $x, y$   
→ VOLUME

$$y_G = \frac{\int_V \rho(x, y) y dV}{m_{\text{TOT}}}$$

CASO DI DENSITÀ COSTANTE, NEL PIANO:

$$x_G = \frac{\rho \cdot h}{m_{\text{TOT}}} \int_A x dA$$

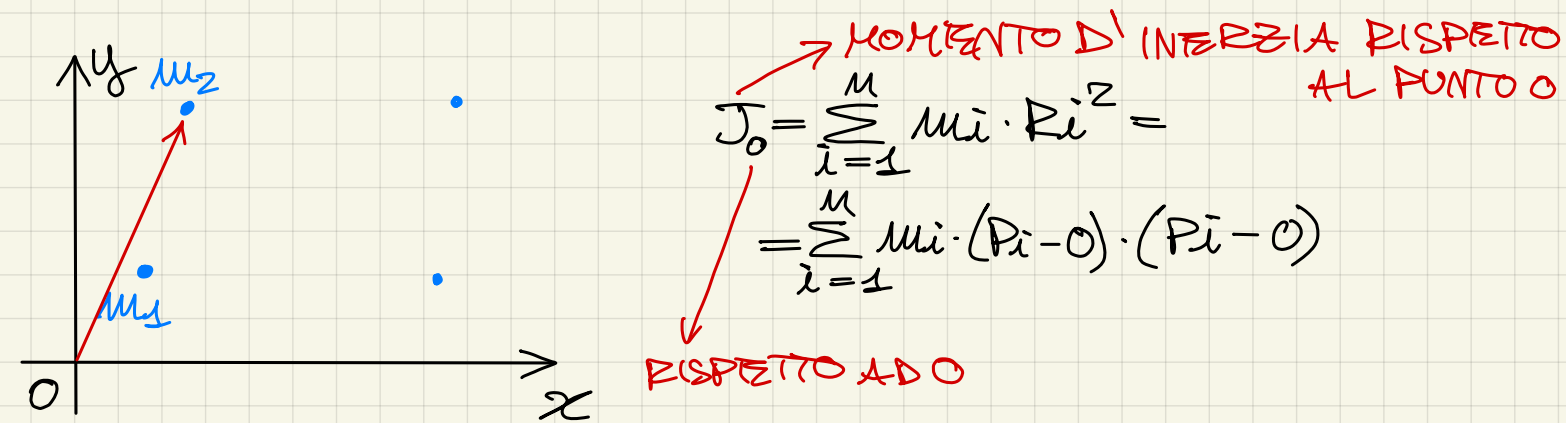
→ AREA ] CORRISPONDE AL BARICENTRO GEOMETRICO

$$y_G = \frac{\rho \cdot h}{m_{\text{TOT}}} \int_A y dA$$

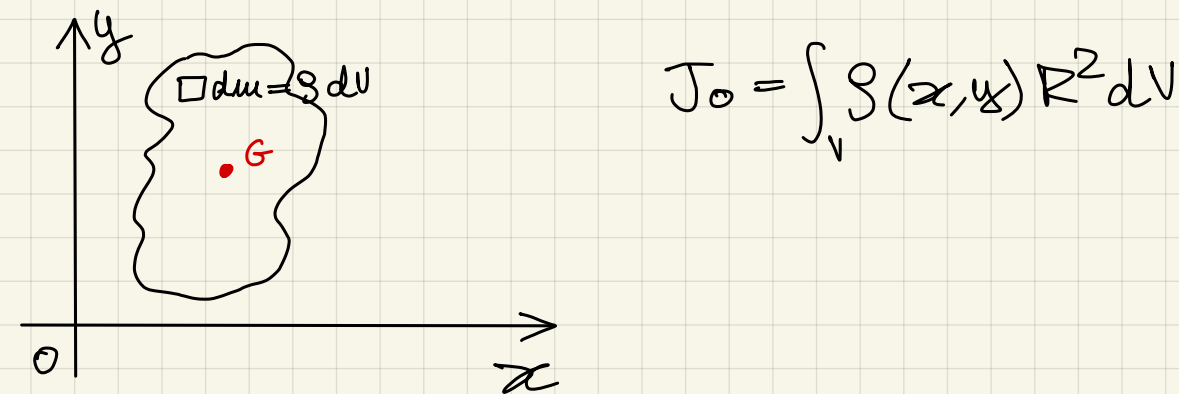
SE IL CORPO HA UNO O PIÙ ASSI DI SIMMETRIA, IL BARICENTRO SI TROVA SULL'INTERSEZIONE

# MOMENTO D'INERZIA (RISPETTO AD O)

SISTEMA FORMATO DA  $n$  MASSE CONCENTRATE:



CASO "CORPO CONTINUO":



COME PRIMA, SE  $\rho, h = \text{cost}$

$$J_0 = \rho h \int_A R^2 dA$$

$A \rightarrow \text{AREA}$

## TEOREMA DI HUYGENS

$$J_0 = \overbrace{J_G}^{\text{BARICENTRO}} + m \overline{OG}^2$$

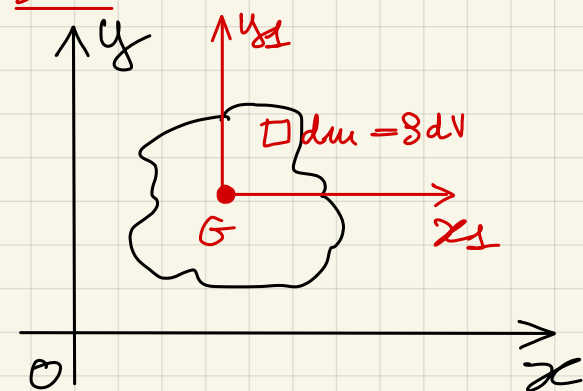
MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO (È UNA PROPRIETÀ DEL CORPO CHE NON DIPENDE DAL S.O. O DA O)

MOMENTO DI INERZIA BARICENTRICO:

FISICAMENTE RAPPRESENTA "QUANTO LA MASSA È CONCENTRATA VICINO AL BARICENTRO"

INOLTRE, ESSO RAPPRESENTA IL MOMENTO D'INERZIA PIÙ PICCOLO CHE CI PUÒ ESSERE

DIM:



$$J_O = \int_V \underbrace{\rho(x^2 + y^2)}_{R^2} dV$$

$$J_G = \int_V \rho(x_1^2 + y_1^2) dV$$

$$x = x_1 + x_G$$

$$y = y_1 + y_G$$

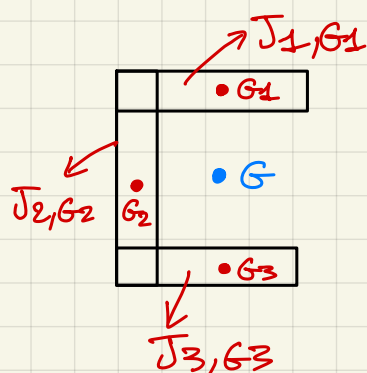
$$\Rightarrow J_O = \int_V \rho [(x_1 + x_G)^2 + (y_1 + y_G)^2] dV =$$

$$= \underbrace{\int_V \rho (x_1^2 + y_1^2) dV}_{J_G} + \underbrace{\int_V \rho (x_G^2 + y_G^2) dV}_{M_{TOT} \overline{OG}^2} +$$

$$+ 2 \int_V \rho \cancel{x_G} y_1 dV + 2 \int_V \rho y_G \cancel{x_1} dV$$

"COORDINATE DEL BARICENTRO  
RISPETTO AL BARICENTRO"

È QUINDI UTILE PER CALCOLARE IL BARICENTRO DI  
UN CORPO COMPLESSO (MA "SODDIVISIBILE")



$$G_x = \frac{G_{1x} m_1 + G_{2x} m_2 + G_{3x} m_3}{M_{TOT}}$$

$$G_y = \frac{G_{1y} m_1 + G_{2y} m_2 + G_{3y} m_3}{M_{TOT}}$$

$$J_G = \underbrace{J_{1,G}}_{J_{1,G_1} + m_1 \overline{G_1 G}^2} + J_{2,G} + J_{3,G}$$

$$J_{1,G_1} + m_1 \overline{G_1 G}^2$$

# DINAMICA DEI CORPI

TRATTAZIONE DIVISA IN DUE FAMIGLIE:

PIÙ  
→ FORMALE

1) EQUILIBRI DINAMICI (" $\Sigma F = ma$ ")

EQUAZIONI  
CARDINALI

PRINCIPIO  
DI D'ALEMBERT

↓  
SIMILE AL NOSTRO APPROCCIO

2) METODI ENERGETICI  
(TRATTA LA DINAMICA COME  
UNA VARIAZIONE DI ENERGIA  
ASSOCIATA AI CORPI IN  
MOVIMENTO)

PRINCIPIO DEI  
LAVORI VIRTUALI

EQUAZIONI DI  
LAGRANGE

TEOREMA  
DELL'ENERGIA  
CINETICA

BILANCIO DI  
POTENZE

## PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

1) PUNTO MATERIALE

UN CORPO SI TROVA IN CONDIZIONE DI EQUILIBRIO  
DINAMICO QUANDO: (RAGGRUPPABILE CON PRIMA  
SOLUZIONI)

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{F}_{in} = 0$$

FORZE  
ESTERNE  
AGENTI  
SUL SISTEMA  
(CONSTATICA:  
ATTIVE + REATTIVE)

FORZE DI  
INERZIA

DERIVA DIRETTAMENTE DA:

$$\sum \vec{F}_i = m \vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_i - \underbrace{m \vec{a}}_{\vec{F}_{in}} = 0 \quad (\text{DUE VETTORI OPPOSTI})$$

MODI E CONSIDERAZIONI SUL CALCOLO SONO LE STESS  
DELLA STATICA: L'ABBIAMO RICONDOTTO A UN PROBLEMA  
DI "STATICA EQUIVALENTE"

## 2) CORPO RIGIDO (ESTENSIONE A SISTEMA DI CORPI OMESSA IN QUANTO EQUIVALENTE A STATICA: Moltiplicata per GU IL CORPO)

UN CORPO RIGIDO SI TROVA IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DINAMICO SE:

(SIA  $O$  UN GENERICO PUNTO):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_i + \vec{F}_{in} = 0 \\ \sum (\vec{P}_i - O) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_G + (G - O) \wedge \vec{F}_{in} + \vec{C}_{in} = 0 \end{array} \right. \quad (3eq)$$

MANCA DEFINIRE QUANTO VALE PER TUTTI I PUNTI

EQ. DEI MOMENTI INTORNO A  $O$  PER LE  $F_i$   $\rightarrow$  COPPIE / MOMENTI CONCENTRATI (ES: PATTINO)

MOMENTO DELLA FORZA D'INERZIA RISPETTO A  $O$  (PERCHÉ  $F_{in}$  APPLICATO IN  $G$ )

"COPPIA D'INERZIA" (SEMPRE  $F \times \text{BRACCIO}$ )  
"OPPONE RESISTENZA ALL'ACCELERAZIONE ANGOLARE"

### POSSIBILI PROBLEMI IN DINAMICA:

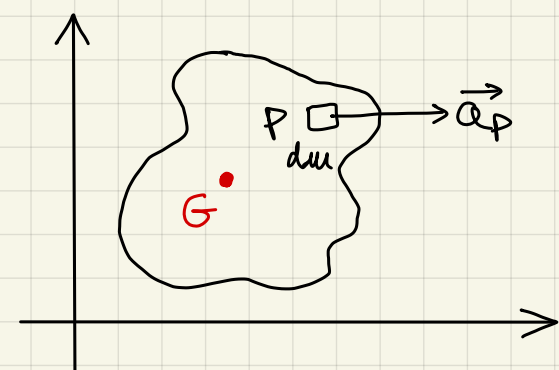
1) DINAMICA DIRETTA: NOTE LE FORZE CHE AGISCONO SUL SISTEMA, VOGLIO DETERMINARE COME SI MUOVE

TIPICAMENTE, INCOGNITE: ACC. BARICENTRO, ACC. ANGOLARE

2) DINAMICA INVERSA: DETERMINARE FORZE DA APPLICARE PER FARLO MUOVERE COME VOGLIO

3) INTERMEDIO TRA I DUE

### ESPLICITAZIONE I TERMINI:



$$\vec{F}_{in} = \int_V d\vec{F}_{in} = - \int_V g \vec{a}_P dV$$

$$d\vec{F}_{in} = -dm \vec{a}_P \quad (\text{PER TUTTI I P DEL CORPO})$$

MA DAL TEOREMA DI PIVALS:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \dot{\omega} \wedge (P - G) - \omega^2 (P - G)$$

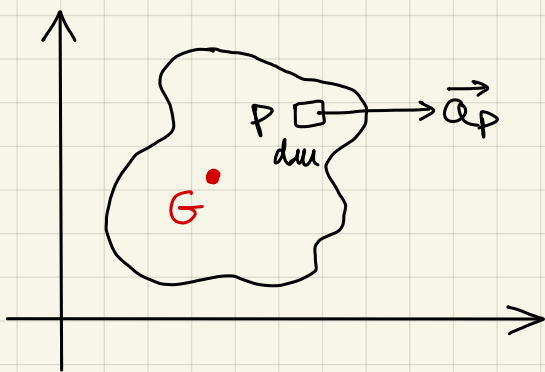
SOSTITUENDO:

$$\vec{F}_{\text{in}} = -\vec{a}_G \int_V \rho dV - \vec{\omega} \wedge \int_V \rho(\vec{P}-\vec{G}) dV + \omega^2 \int_V \rho(\vec{P}-\vec{G}) dV$$

"BARICENTRO RISPETTO AL BARICENTRO"

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{in}} = -m \vec{a}_G}$$

DEFINIAMO ORA LA COPPIA D'INERZIA:



"TUTTI I MOMENTI DEI PEZZETTINI INFINITESIMI"

ANTICIPAZIONE: APPLICANDO UNA FORZA SU UN DATO CORPO, NE OTTENGONO UNO "EQUIPOLLENTE" (EQUIVALENTE DAL PUNTO DI VISTA ENERGETICO)

SPOSTANDOLA SULLA STESSA RETTA DI APPLICAZIONE DEVO AGGIUNGERE UN "MOMENTO DI TRASPORTO" QUESTO TERMINE QUINDI TIENE CONTO DELLA DISTRIBUZIONE DELLE FORZE D'INERZIA (INVECE CHE CONCENTRARLE NEL BARICENTRO)

$$\vec{C}_{\text{in}} = - \int_V (\vec{P}-\vec{G}) \wedge \vec{a}_P \rho dV =$$

COME PRIMA:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{\omega} \wedge (\vec{P}-\vec{G}) - \omega^2 (\vec{P}-\vec{G})$$

$$= \underbrace{\left( \int_V (\vec{P}-\vec{G}) \rho dV \right)}_{\text{COME PRIMA}} \wedge \vec{a}_G - \int_V (\vec{P}-\vec{G}) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{P}-\vec{G})) \rho dV +$$

$$+ \int_V (\vec{P}-\vec{G}) \wedge (\vec{\omega}^2 (\vec{P}-\vec{G})) \rho dV =$$

PRODOTTTO VETTORIALE  
DI DUE VETTORI  
UGUALI

$$= - \int_V \overline{PG}^2 \vec{\omega} \rho dV = - \vec{\omega} \int_V \overline{PG}^2 \rho dV = - J_G \vec{\omega}$$

MOMENTO D'INERZIA  
BARICENTRICO

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Cim} = - J_G \vec{\omega}}$$